SECONDO TEST (Geometria analitica)

12 febbraio 2013

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ sono dati il punto $P(1;1;1)$ e la retta r di equazioni:

$$r \ : \ \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Determinare:

(a) un'equazione cartesiana del piano π passante per r e per il punto A(2;0;0) e le equazioni dei piani paralleli a π e distanti 3 da esso; $\boxed{5}$
[$\pi \ : \ 2x + 5y - 3z - 4 = 0,$
$2x + 5y - 3z + (3\sqrt{38} - 4) = 0, \quad 2x + 5y - 3z - (3\sqrt{38} + 4) = 0$]

(b) un'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta r e passante per P; $\boxed{2}$
[$2x + y + 3z - 6 = 0$]

(c) il luogo descritto dai centri delle sfere di raggio unitario passanti per P e ivi tangenti la retta r. $\boxed{4}$
[$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 1 = 0 = 2x + y + 3z - 6$]

Esercizio 2. Nel piano proiettivo complesso, si consideri il fascio di coniche $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{C} \ : \ x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 2kx = 0$$

.

(a) Determinare le coniche degeneri, i punti base e la natura del fascio $\mathscr{F}$. $\boxed{6}$
[Coniche degeneri: $x_1 x_3 = 0, \ (x-y)(x-y+2) = 0$
Punti base: $(0;0), (0;2), [(1;1;0)]$ contato due volte. Si tratta di un fascio di coniche tangenti a r_∞ nel punto $[(1;1;0)]$ (parabole)]

Indicata con $\mathscr{C}$ la conica del fascio corrispondente al valore $k = 0$:

(b) determinarne le coordinate del centro, le equazioni degli assi e le coordinate dei vertici; $\boxed{3}$
[Centro: $[(1;1;0)]$, Asse: $2x - 2y + 1 = 0$, Vertice: $(-3/8; 1/8)$]

(c) nella polarità indotta da $\mathscr{C}$, determinare le coordinate del punto P, polo della retta $p \ : \ x + 3 = 0$ e le coordinate del coniugato Q di P, appartenente alla retta $q \ : \ x - y - 2 = 0$. $\boxed{4}$
[$P(2;3), \ Q(-3;-5)$]

Esercizio 3. Sia $M_k \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ la matrice seguente:

$$M_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k^2-1 \\ 0 & 1 & (k-1)^2 \\ k+1 & 1 & 2k \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) i valori di k per cui la forma bilineare f su $\mathbb{R}^3$ definita da $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^t M_k \boldsymbol{y}$ risulti un prodotto scalare; $\boxed{2}$
[$k = 2$]

(b) per tali valori di k,

(i) stabilire se la forma è regolare o degenere e, nel caso sia degenere, determinarne il radicale; $\boxed{3}$
[Forma degenere, radicale: $< (1; 1; -1) >$]

(ii) detta q la forma quadratica associata alla forma bilineare f, studiare la conica del piano proiettivo complesso di equazione $q(\boldsymbol{x}) = 0$. $\boxed{5}$
[Conica semplicemente degenere con centro $(-1; -1)$ costituita dalle due rette immaginarie e coniugate $y + 1 = \pm i\sqrt{3}(x + 1)$]